

Die Neunzehnleiter im Lichte der klassischen Harmonielehre

Die Pythagoreer trieben einen Geheimkult (und das vor rund 2500 Jahren), so daß nicht viel und recht Ungenaues davon überliefert ist. Immerhin ist von einem Pythagoreer namens Philolaos das folgende Schriftfragment auf dem Umweg über Stobaios erhalten:

περὶ δὲ φύσιος καὶ ἀρμονίας ὧδε ἔχει

Mit der Natur und Harmonie verhält es sich folgendermaßen:

Bedenkt man das Alter, so muß man anerkennen, daß dieses System erstaunlich konsistent ist: Die *ἀρμονία* ('Harmonie' = Oktave = $\frac{1}{2}$) ist zusammengefügt aus einer *συλλαβᾶ* ('Syllaba' = Quart = $\frac{3}{4}$) und einer *ὄξειᾶν* ('Oxeian' = Quint = $\frac{2}{3}$), wie die kleine Rechnung $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2$ zeigt. Und damit sind die Zahlen der 'Dekade' *δεκάδι* (das ist $1 + 2 + 3 + 4 = 10$) ausgeschöpft. Mehr braucht es nicht um eine ganze Welt aus dem 'Unbegrenzten' *ἀπειρῶν* herauszuholen. Der Rest berechnet sich von allein: Der Ganzton 'Epogdo' *ἐπογδῶ* ist definiert als Unterschied zwischen Quint und Quart $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$. Zwei Ganztöne ergeben eine große Terz $\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64}$, und der Rest zur Quart $\frac{4}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{256}{243}$ definiert den Halbton 'Diesis' *διεσις*. Insgesamt ist die Oktave - der Grieche sagt 'Harmonie' und meint damit auch das schön Zusammengesetzte - konstruiert aus fünf Ganztönen und zwei Halbtönen, und zwar zuerst zwei ganze, dann ein halber zur Quart, dann ein ganzer zur Quint, und schließlich noch zwei ganze und ein halber Ton zur Oktave. Heutzutage heißt das DUR.

Die kleine Terz errechnet sich in diesem System als zusammengesetzt aus Ganzton und Halbton $\frac{9}{8} \cdot \frac{256}{243} = \frac{32}{27}$. Die deutsche Bezeichnung 'Halbton' trügt, denn

$$\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = \frac{524288}{472392} \neq \frac{531441}{472392} = \frac{9}{8},$$

was einem Fehler von über 1,3% entspricht. Die kleine Sext wird zu $\frac{3}{2} \cdot \frac{256}{243} = \frac{128}{81}$ die große Sext zu $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$. Die kleine Septime wird zu $\frac{3}{2} \cdot \frac{32}{27} = \frac{16}{9}$ die große Septime zu $\frac{3}{2} \cdot \frac{81}{64} = \frac{243}{128}$. Bei den 'DUR-Intervallen' haben wir Zweierpotenzen im Nenner, bei den 'MOLL-Intervallen' Dreierpotenzen. Die Nenner 5, 6 und 7 tauchen nicht auf.

Die pythagoreische Unterteilung der Oktave in Quart und Quint $\frac{2}{1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$ muß nicht unbedingt bei den ersten vier Zahlen halten. Das ist eigentlich nur zu begründen, indem man den ersten vier Zahlen eine besondere (göttliche? nämlich $1 + 2 + 3 + 4 = \text{δεκάδι}$) Rolle zubilligt. Es läßt sich schließlich für jede natürliche Zahl größer Null die Aufteilung

$$\frac{n+1}{n} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n}$$

vornehmen. Im nächsten Schritt wäre also die Quint zu zerteilen in eine kleine und eine große Terz $\frac{3}{2} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4}$. Allerdings haben wir hier etwas andere Terzen vorliegen: $\frac{5}{4} = \frac{80}{64} \neq \frac{81}{64}$ bzw. $\frac{6}{5} = \frac{160}{135} \neq \frac{162}{135} = \frac{32}{27}$.

Mit der etwas kleineren großen Terz gewinnt die Bezeichnung 'Halbton' für den Unterschied zur Quart $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$ nur wenig Unterstützung:

$$\frac{16}{15} \cdot \frac{16}{15} = \frac{2048}{1800} \neq \frac{2025}{1800} = \frac{9}{8}$$

Der Fehler von nun etwas über 1,1% hat nun das andere Vorzeichen. Der Unterschied zwischen großer und kleiner Terz $\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24}$ kann nun aber überhaupt nicht mehr als 'Halbton' durchgehen:

$$\frac{25}{24} \cdot \frac{25}{24} = \frac{625}{576} \neq \frac{648}{576} = \frac{9}{8}$$

Das sind mehr als 3,5% Fehler. Sehr viel besser (nämlich besser als 0,5%) paßt

$$\left(\frac{25}{24}\right)^3 = \frac{15625}{13824} \neq \frac{15552}{13824} = \frac{9}{8}$$

Mit guter Näherung können wir von einem 'Drittelton' sprechen. Als Unterschied zwischen Ganzton und kleiner Terz $\frac{6}{5} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{15}$ findet sich wieder der neue Halbton.

Insgesamt zerfällt die Oktave in eine Quint und eine Quart. Diese unterscheiden sich um einen Ganzton. Die Quinte wiederum zerfällt in eine große und eine kleine Terz. Diese unterscheiden sich um einen Drittelton. Die kleine Terz zerlegen wir in einen Ganzton und einen Halbton. Die Quart zerfällt in eine große Terz und einen Halbton.

Oktave								
Quint					Quart			
gr. Terz			kl. Terz		Halbt.	gr. Terz		
kl. Terz		Drittelt.	Halbt.	Ganzt.	Halbt.	Drittelt.	kl. Terz	
Ganzt.	Halbt.	Drittelt.	Halbt.	Ganzt.	Halbt.	Drittelt.	Halbt.	Ganzt.

Setzt man als Grundton mal 100 Herz an, so ergibt diese Tonleiter die folgenden Frequenzen, die wir den Pythagoreern zu Ehren und zur Unterscheidung mit griechischen Buchstaben benennen:

100	112,5	120	125	133,3...	150	160	166,6...	177,7...	200
α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	ι	α^2

Vielleicht sollte man auch nicht mehr von 'Oktave' sprechen sondern von 'Dekade'.